

# CONTROL POR PLANOS DESLIZANTES ADAPTATIVOS DE UN SISTEMA MULTIVARIABLE DESACOPLADO

## Adaptive Sliding Mode Control of a Multivariable Decoupled System

### RESUMEN

Se presenta un esquema para la aplicación del control por planos deslizantes usando identificación paramétrica adaptativa de un sistema multivariable. En el diseño del controlador se considera que el sistema es desacoplado y que los acoples se pueden considerar como perturbaciones. Las pruebas sobre el desempeño del controlador se realizan sobre un sistema multivariable de segundo orden simulado sobre un computador analógico.

**PALABRAS CLAVES:** Planos deslizantes, adaptativo, control, multivariable.

### ABSTRACT

*We present a sliding mode control using parametric estimation of a multivariable system. The controller design implies that the system is decoupled and the internal coupling can be considered as perturbations. Controller test are performed over a second order multivariable system simulated over an analog computer.*

**KEYWORDS:** *Sliding modes, adaptive, control, multivariable.*

## 1. INTRODUCCIÓN

El control de sistemas multivariables presenta una gran complejidad debido al comportamiento interno de los sistemas y a los acoples que presentan entre sus entradas y salidas. Sin embargo, es posible considerar estos sistemas multivariables como sistemas desacoplados y los efectos de los acoples como perturbaciones. Estas aproximaciones dan resultado cuando se aplican técnicas de control como las propuestas en [1 – 3] sobre sistemas multivariables que no se encuentran fuertemente acoplados. Cuando estos acoples internos son muy fuertes es necesario tener un sistema de control que sea robusto a perturbaciones grandes. Entre las técnicas de control que presentan esta robustez frente a perturbaciones se encuentra la técnica de planos deslizantes [4, 5]. Con el diseño apropiado del controlador por planos deslizantes es posible garantizar la estabilidad del sistema de control frente a perturbaciones fuertes [6 – 8].

Otra forma de garantizar la robustez del sistema de control, es a partir de una identificación en línea de parámetros. De esta forma se puede obtener un modelo matemático del sistema variante con el tiempo que permita ajustar el funcionamiento del controlador. Las técnicas utilizadas para esta identificación usualmente minimizan una función de costo tal como el error de aproximación y pueden ser modificadas para el cálculo de parámetros en línea. La identificación paramétrica de los sistemas multivariables adicionalmente permite

considerar los acoples de los sistemas como variaciones paramétricas que ajusten la ley de control.

En este artículo se propone un esquema de control con planos deslizantes a partir de la identificación paramétrica de un sistema multivariable. Se considera el sistema desacoplado, y se modelan los acoples internos como variaciones paramétricas y perturbaciones. En la sección 2 se presenta una breve introducción al control por planos deslizantes, en la sección 3 se plantea la identificación para el caso multivariable desacoplado, en la sección 4 se presenta el sistema de control a través de planos deslizantes adaptativos, y en la sección 5 se muestran los resultados sobre un sistema multivariable de segundo orden.

## 2. CONTROL POR PLANOS DESLIZANTES

En general, el control por planos deslizantes puede ser separado en dos partes: el modo de alcance (*reaching mode*) y el modo deslizante (*sliding mode*). La superficie de deslizamiento  $S = 0$  es el camino deseado en el espacio de estados, el cual es dado por el diseñador [2, 7]. Estos puntos constituyen una trayectoria especial sobre la superficie  $S = 0$  llamada plano deslizante. Entonces, la trayectoria del sistema en el plano de fase consta de dos partes que representan los dos modos del sistema. La primera parte es el modo de alcance, en el cual la trayectoria inicia desde cualquier punto sobre el plano de fase moviéndose hacia la superficie de conmutación  $S$  la cual alcanza en un tiempo finito. La segunda parte es el

modo deslizante, en el cual la trayectoria tiende asintóticamente hacia el origen del plano deslizante  $S = 0$ .

## 2.1 Condiciones de diseño

Considere un sistema de orden  $n$  el cual puede ser representado por el siguiente modelo de espacio de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + u(t) + d(t)\end{aligned}\quad (1)$$

donde  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$  y  $u$  son el vector de estado  $n$  dimensional y la entrada de control del sistema respectivamente. Y  $d(t)$  representa la perturbación externa. La perturbación se asume acotada de la forma

$$|d(t)| \leq D \quad (2)$$

donde  $D$  es un valor escalar. Si el estado deseado  $\mathbf{x}_d$  es una función escalón, entonces las ecuaciones dinámicas dadas en (1) se pueden reescribir en términos del error, como se muestra a continuación.

El error se define como

$$\mathbf{e} = [x_{d1} - x_1 \ x_{d2} - x_2 \ \cdots \ x_{dn} - x_n]^T \quad (3)$$

Si  $x_{d2} = x_{d3} = \cdots = x_{dn}$  entonces el error está dado por

$$\mathbf{e} = [x_{d1} - x_1 \ -x_2 \ \cdots \ -x_n]^T \quad (4)$$

y sus derivadas son variables de estado como sigue

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ &\vdots \\ \dot{e}_{n-1} &= e_n \\ \dot{e}_n &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n + u(t) - d(t)\end{aligned}\quad (5)$$

La mayoría de las superficies deslizantes se definen como

$$S(\mathbf{e}) = \mathbf{c}^T \mathbf{e} \quad (6)$$

donde  $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]^T$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  y con  $\mathbf{e}$  el vector de error. El vector  $\mathbf{c}$  se define a partir de la ecuación  $S(\mathbf{e}) = \mathbf{c}^T \mathbf{e} = 0$ , lo cual garantiza que el sistema resultante sea estable. Al desarrollar (6) se tiene

$$S(\mathbf{e}) = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_{n-1} e_{n-1} + e_n = 0 \quad (7)$$

con  $c_n = 1$ . Si se deriva con respecto a  $t$  la ecuación (7), se tiene

$$\dot{S}(\mathbf{e}) = c_1 \dot{e}_1 + c_2 \dot{e}_2 + \cdots + c_{n-1} \dot{e}_{n-1} + \dot{e}_n = 0 \quad (8)$$

Y reemplazando (5) en (8) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{S}(\mathbf{e}) &= a_1 e_1 + (a_2 + c_1) e_2 + \cdots \\ &+ (a_n + c_{n-1}) e_n - u_{eq} - d(t)\end{aligned}\quad (9)$$

La ley de control equivalente  $u_{eq}$  está dada entonces por

$$u_{eq} = a_1 e_1 + (a_2 + c_1) e_2 + \cdots + (a_n + c_{n-1}) e_n + d(t) \quad (10)$$

La ley de control de la ecuación (10) mantiene el sistema sobre el plano deslizante  $S = 0$ . Ahora, si el estado actual del sistema se encuentra por fuera del plano deslizante, y se requiere llevarlo hasta el plano deslizante, es necesario plantear una ley de control tal que

$$\dot{S} < \eta |S| \quad (11)$$

donde  $\eta$  es una constante positiva, y (11) es llamada la condición de alcanzabilidad [2]. El objetivo del control es garantizar que la trayectoria de estados del sistema converja a la superficie deslizante. De esta forma, se define una ley de control correctivo  $u_c$  como sigue

$$u_c = K \cdot \text{sgn}(S) \quad (12)$$

con  $K$  una constante positiva, y la función  $\text{sgn}$  una función discontinua definida como

$$\text{sgn}(S) = \begin{cases} 1, & S > 0 \\ 0, & S = 0 \\ -1, & S < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Finalmente, la ley de control total  $u$  corresponde a la combinación de  $u_c$  y  $u_{eq}$  de la forma

$$\begin{aligned}u &= u_c + u_{eq} \\ &= a_1 e_1 + (a_2 + c_1) e_2 + \cdots + (a_n + c_{n-1}) e_n + d(t) \\ &+ K \cdot \text{sgn}(S)\end{aligned}\quad (14)$$

De la ecuación (12) se nota que la entrada de control presenta oscilaciones de alta frecuencia debido a la función signo, generando en la salida del sistema oscilaciones (*chattering*). En [7 – 10] se describen algunos métodos para disminuir estas oscilaciones.

## 3. IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS MIMO

De forma general el sistema de identificación en línea incluyendo la etapa de control se muestra en la figura 1.

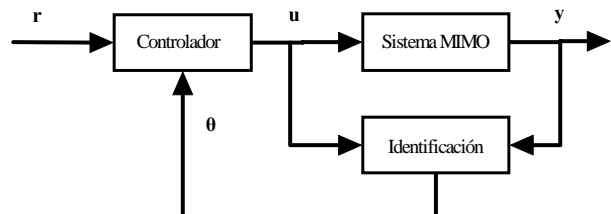


Figura 1. Esquema general de identificación y control de un sistema MIMO.

Los sistemas de identificación en línea, permiten obtener un modelo matemático del sistema variante con el tiempo. De esta forma, se puede diseñar un controlador dependiente del modelo del sistema lo cual hace que el sistema de control sea robusto a perturbaciones.

En [11] se propone un esquema de identificación en línea para sistemas multivariables con una entrada y múltiples salidas. Este esquema puede ser extendido a sistemas multivariables desacoplados, considerando los acoples como perturbaciones y variaciones paramétricas. Es decir, el vector de parámetros  $\theta$  se divide en  $m$  conjuntos disjuntos de datos, cada uno asociado con una entrada y una salida. Por tanto, el sistema de identificación propuesto en [11] se convierte en  $m$  sistemas de identificación de sistemas SISO de la forma

$$\hat{\theta}_i(t) = \hat{\theta}_i(t-1) + \frac{P_i(t-2)\phi_i(t-1)\phi_i(t-1)^T P_i(t-2)}{1 + \phi_i(t-1)^T P_i(t-2)\phi_i(t-1)} \left[ y_i(t) - \phi_i(t-1)^T \hat{\theta}_i(t-1) \right] \quad (15)$$

con la actualización de la matriz  $P_i$  dada por

$$P_i(t-1) = P_i(t-2) - \frac{P_i(t-2)\phi_i(t-1)\phi_i(t-1)^T P_i(t-2)}{1 + \phi_i(t-1)^T P_i(t-2)\phi_i(t-1)} \quad (16)$$

y donde  $\hat{\theta}_i$  es un vector de parámetros que corresponde a los coeficientes  $a_j$  y  $b_j$  que relacionan la salida actual del sistema  $y_i(t)$ , con las entradas  $u_i(t-j-1)$  y salidas  $y_i(t-j)$  pasadas como se muestra en la ecuación (17), y  $\phi$  es el vector de entradas y salidas pasadas.

$$y_i(t) = -\sum_{j=1}^{n_1} a_j y_i(t-j) + \sum_{j=0}^{n_2} b_j u_i(t-j-1) \quad (17)$$

Al considerar el sistema MIMO desacoplado, se obtienen  $m$  vectores de parámetros  $\theta$  variantes con el tiempo. En la figura 2, se muestra el esquema para la identificación desacoplada de sistemas MIMO.

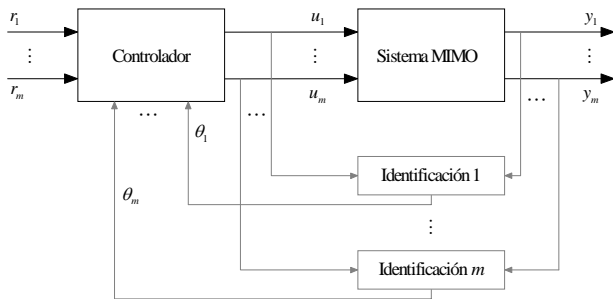


Figura 2. Esquema de identificación desacoplada para un sistema MIMO.

#### 4. PLANOS DESLIZANTES ADAPTATIVOS

Considerando la ecuación (6) se puede plantear una superficie  $S$  en términos de los parámetros de  $\theta_i$  y de las entradas y salidas pasadas, que utiliza  $\phi(t)$ , dada por [9, 10]:

$$y(t+1) = \Phi(\phi(t)) + \Gamma(\phi(t))u(t) \quad (18)$$

donde de forma general  $\Phi(\cdot)$  y  $\Gamma(\cdot)$  se consideran funciones no lineales suaves,  $y(t)$  es la salida de la planta,  $u(t)$  la señal de control. Inicialmente, para el diseño de la ley de control, se supone  $\Phi(\cdot)$  y  $\Gamma(\cdot)$  conocidas de la forma mostrada en la ecuación (17). Reescribiendo la ecuación (17) en la forma de predicción, se tiene

$$y(t+1) = -\sum_{j=1}^{n_1} a_j y(t-j+1) + \sum_{j=0}^{n_2} b_j u(t-j) \quad (19)$$

y comparando la ecuación (19) con la ecuación (18) se tiene que

$$\Gamma(\phi(t))u(t) = b_0 u(t) \quad (20)$$

y

$$\Phi(\phi(t)) = -\sum_{j=1}^{n_1} a_j y_i(t-j+1) + \sum_{j=1}^{n_2} b_j u_i(t-j) \quad (21)$$

Ahora, se define la superficie deslizante discreta como:

$$s(t+1) = C(q^{-1})e(t+1) \quad (16)$$

donde  $C(q^{-1}) = 1 + c_{n-1}q^{-1} + c_{n-2}q^{-2} + \dots + c_1q^{-n}$  es un polinomio cuyos coeficientes corresponden al vector  $\mathbf{c}$  de la ecuación (6) y  $e(t+1) = y(t+1) - r(t+1)$

es el error de seguimiento con  $r(t+1)$  la señal de referencia. El método de control equivalente puede ser aplicado para asegurar  $s(t+1) = 0$ , así:

$$\begin{aligned} s(t+1) &= C(q^{-1})y(t+1) - C(q^{-1})r(t+1) \\ s(t+1) &= C(q^{-1})\Phi(\phi(t)) - C(q^{-1})r(t+1) \\ &\quad + C(q^{-1})\Gamma(\phi(t))u_{eq}(t) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} s(t+1) &= F(\phi(t)) + G(\phi(t))u_{eq}(t) \\ &\quad - C(q^{-1})r(t+1) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F(\phi(t)) &= C(q^{-1})\Phi(\phi(t)) \\ G(\phi(t)) &= C(q^{-1})\Gamma(\phi(t)) \end{aligned} \quad (23)$$

y despejando  $u_{eq}(t)$  para  $s(t+1) = 0$ , se obtiene la

ley de control:

$$u_{eq}(t) = -G(\phi(t))^{-1} \left( F(\phi(t)) - C(q^{-1})r(t+1) \right) \quad (24)$$

A partir del análisis desarrollado en la ecuación (14) se adiciona a la señal de control de la ecuación (24) el término  $u_c$  de la ecuación (12) obteniendo la siguiente señal de control total

$$u(t) = -G(\phi(t))^{-1} \left( F(\phi(t)) - C(q^{-1})r(t+1) \right) + K \cdot \text{sgn}(s(t)) \quad (25)$$

La aplicación del controlador se realiza sobre los sistemas independientes considerados en la identificación de parámetros. En la figura 3 se muestra el esquema completo para el control multivariable desacoplado utilizando la técnica de planos deslizantes adaptativos.

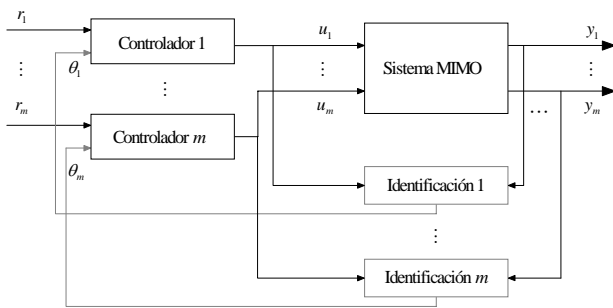


Figura 3. Esquema de identificación y control desacoplados sobre un sistema MIMO.

## 5. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Las pruebas del sistema se realizaron sobre un sistema de segundo orden con dos entradas y dos salidas descrito por el modelo de espacio de estados de la ecuación (26), implementado sobre el computador análogo COMDYNA GP-6.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

En la figuras 4 se observa el comportamiento del identificador para diferentes valores en las señales de referencia  $r_1$  y  $r_2$ , se nota como los valores de estimación para las salidas  $\hat{y}_1$  y  $\hat{y}_2$  se aproximan muy bien a las salidas reales de la planta  $y_1$  y  $y_2$ . Adicionalmente, se observa como los acoples del sistema multivariable aparecen como perturbaciones y variaciones paramétricas en cada cambio de las señales de referencia para los dos canales.

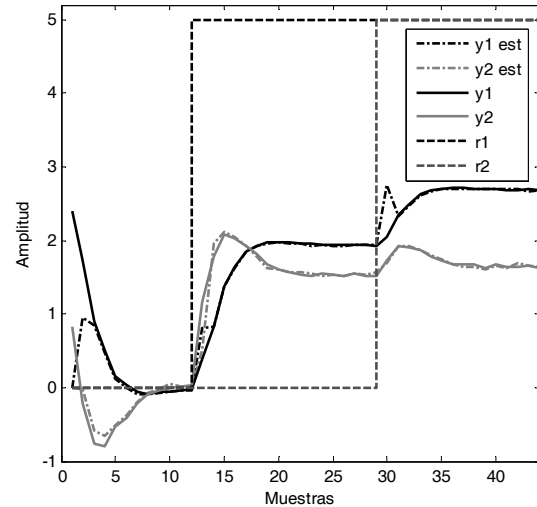


Figura 4. Resultados de la identificación desacoplada para el sistema MIMO en lazo abierto.

En la figura 5 se observa la respuesta del sistema cuando se tiene el controlador con planos deslizantes, y la señal de control. Se observa que el sistema llega al valor de referencia y se nota el comportamiento oscilante (*chattering*) de la señal de control debida a  $u_c$ .

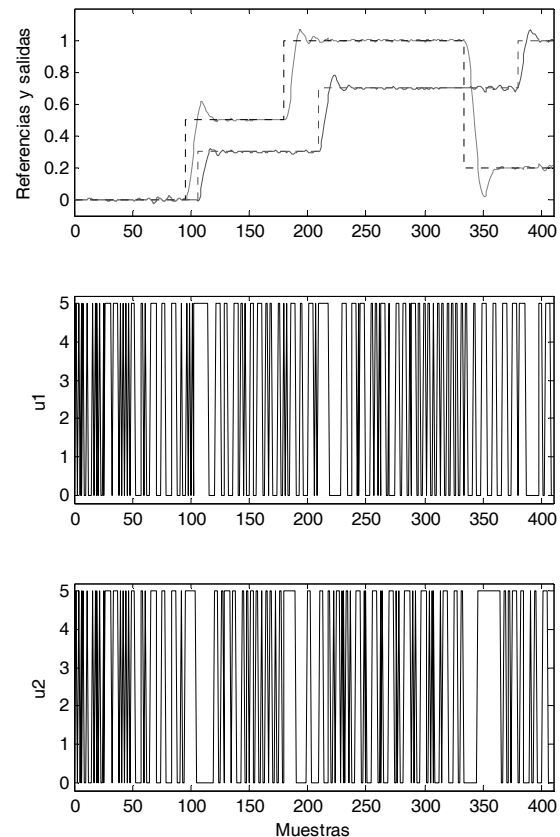


Figura 5. Sistema MIMO controlado con la técnica de planos deslizantes adaptativos.

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La utilización de la estrategia de control por planos deslizantes sobre un sistema MIMO utilizando una estrategia de identificación desacoplada permite obtener buenos resultados al generalizar la estrategia de control para un sistema SISO.

Al considerar los acoples como perturbaciones y variaciones paramétricas se puede simplificar el modelo de identificación al utilizar  $m$  identificadores para sistemas SISO. Cuando se considere un modelo completo del sistema multivariable incluyendo los acoples es necesario plantear un sistema de control que considere los parámetros del sistema.

Las oscilaciones resultantes en las salidas del sistema MIMO pueden ser disminuidas al incluir limitaciones en la señal de control y al utilizar sistemas inteligentes.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] G. C. Goodwin, Peter J. Ramadge, and Peter E. Caines. Discret time multivariable adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-25(3):449–456, 1980.
- [2] Utkin, V. Variable Structure Systems with Sliding Modes, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, No. 2, pp: 212–222, 1977.
- [3] Abidi, K.; Xu, J. and Xinghuo, Y. On the Discret-Time Integral Sliding-Mode Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 55, No. 4, pp: 709–715, 2007.
- [4] Hirschorn, R. Sliding Mode Control Variations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 52, No. 3, pp: 468–480, 2007.
- [5] Bartolini, G.; Ferrara, A.; and Slotky, A. Robustness and Performance of an Indirect Adaptive Control Scheme in Presence of Bounded Disturbances, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 4, pp: 789–793, 1999.
- [6] Dogruel, M.; Ozguner, U. and Drakunov, S. Sliding Mode Control in Discrete State and Hybrid Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 3, pp: 414–419, 1996.
- [7] Tsai, C.; Chung, H.; and Yu, F. Neuro-Sliding Mode Control With its applications to seesaw systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 15, No. 1, pp: 124–134, 2004.
- [8] Tong, S. and Li, H. Fuzzy Adaptive Sliding mode Control for MIMO Nonlinear Systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 11, No. 3, pp: 354–360, 2004.
- [9] Hoyos, J. *Control adaptativo usando planos deslizantes y redes neuronales de la velocidad de un motor AC*, Tesis de Grado, Maestría en Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, 2004.
- [10] Perruquetti, W. and Barbot, J. *Sliding Mode Control in Engineering*, Marcel Dekker, 2002.
- [11] G. C. Goodwin and K. S. Sin, *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Englewood-Cliffs: Prentice Hall, 2nd edition, 1989.
- [12] Astrom, K. *Computer Controlled Systems, Theory and design*, Prentice Hall, 2002.
- [13] Feng, G. *Adaptive Control systems*, Newnes, 1999.
- [14] Ackermann, J., *Robust Control, Systems with Uncertain Physical Parameters*, Springer-Verlag, 1993.
- [15] Astrom, K. and Wittenmark, B. *Adaptive Control*, Prentice Hall, 1994.